

Reconstruction de signaux parcimonieux et matrices aléatoires Gaussiennes.

L'objectif de ce Projet est de proposer une introduction au problème d'acquisition/Compression de données parcimonieuses : le *Compressed Sensing*. Notamment, il sera souligné par la théorie et les simulations le rôle joué par l'aléatoire dans cette problématique.

Les rapports sont à envoyer à guillaume.lecue@cmap.polytechnique.fr. Le projet contient une part de simulations repérées par un **S** et des questions théoriques repérées par un **T**. Le projet peut se faire en monôme ou en binôme. Dans le premier cas, les questions de simulations sont optionnelles ; dans le second cas, toutes les questions **S** et **T** devront être traitées.

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

On se donne une matrice réelle A de taille $m \times p$. On dispose de la donnée $y = Ax$ où $y \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^p$. On souhaite reconstruire exactement x à partir de y . Si $\text{rang}A \geq p$ alors on peut reconstruire facilement y en inversant une sous-matrice de A . Mais, pour le problème qui nous intéresse, on se place dans le cas où le nombre d'observations (ou de mesures) m est bien plus petit que la dimension p de l'espace où vit le signal x . On est donc en présence d'un système hautement sous-déterminé : il y a m équations à p inconnues où $m \ll p$. Néanmoins, on souhaite toujours reconstruire x à partir de y .

Nous avons seulement connaissance de $y = Ax$ (et de A). On peut donc calculer l'ensemble des éléments $t \in \mathbb{R}^p$ tels que $At = y (= Ax)$. Cet ensemble est donné par $x + \ker A$. N'importe quel signal t de $x + \ker A$ aurait pu nous donner l'observation $y (= At = Ax)$. On peut alors se demander comment différencier x de n'importe quel autre élément de $x + \ker A$ partant seulement de la donnée y . On peut par exemple imaginer que x a certaines propriétés qui le rendent unique dans l'ensemble $x + \ker A$. Par exemple, imaginer que tous les éléments non nuls du noyau de A ont tous au moins $2s + 1$ composantes non nulles, pour un certain $1 \leq s \leq p/4$. Ainsi, si x est un vecteur ayant au plus s composantes non nulles alors le seul vecteur de $x + \ker A$ ayant moins de s composantes non nulles est x . Par conséquent, en cherchant dans $x + \ker A$ un vecteur qui a la plus petite taille de support

$$(1) \quad |t|_0 = |\text{supp}(t)|$$

on tombera sur x nécessairement. On peut donc reconstruire x exactement à partir de y (et A) en procédant à l'algorithme :

$$(2) \quad \underset{t \in \mathbb{R}^p}{\text{argmin}} (|t|_0 : At = y).$$

Malheureusement, cet algorithme demande beaucoup de temps de calcul. En fait, il demande un nombre d'opérations de l'ordre de $(p/|x|_0)^{|x|_0}$. Ce qui est prohibitif quand p est très grand. Hors c'est la situation que nous souhaitons traiter : p est très grand (on parle de *statistiques en grandes dimensions*). On ne peut donc pas utiliser en pratique cet algorithme de minimisation ℓ_0 . Néanmoins, il a le mérite de nous apprendre que si $\ker A$ ne contient pas d'éléments non nuls avec moins de $2s + 1$ composantes non-nulles, ce qui est équivalent à dire que toutes les sous-matrices de A de taille $m \times (2s + 1)$ sont injectives, alors il est possible de reconstruire n'importe quel vecteur x qui est s -sparse, c'est-à-dire tel que $|x|_0 \leq s$ seulement à partir de $y = Ax$ et de A .

T-Question 1.1. *Montrer qu'il y a bien équivalence entre [tous les éléments non nuls de $\ker A$ ont strictement plus de $2s + 1$ coordonnées non nulles] et [toutes les sous-matrices de A de taille $m \times (2s + 1)$ sont injectives].*

Le problème de l'algorithme (2) est que la fonction $|\cdot|_0$ définit en (1) n'est pas convexe. En générale, minimiser une fonction non-convexe est difficile d'un point de vue algorithmique. L'idée est donc de remplacer la fonction $|\cdot|_0$ par la fonction convexe qui lui est, en quelque sorte, la plus proche. Pour cela, on introduit la notion d'enveloppe convexe.

Definition 1.2. ([HUL93]) *Soit C une partie convexe de \mathbb{R}^p . Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle enveloppe convexe de f , la plus grande fonction convexe g telle que $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in C$. On note par $\text{conv}(f)$, l'enveloppe convexe de f .*

Cette définition a bien un sens car si \mathcal{C} représente l'ensemble de toutes les fonctions convexes plus petites que f alors $\sup_{g \in \mathcal{C}} g$ est toujours une fonction convexe et donc égale à $\text{conv}(f)$.

Proposition 1.3. *La norme ℓ_1^p est l'enveloppe convexe de la fonction $\ell_0 = |\cdot|_0$ sur B_∞^p , la boule unité de $(\mathbb{R}^p, \ell_\infty^p)$.*

T-Question 1.4. *Dans cette question, on se propose de démontrer le résultat sur B_1^p , la boule unité de la norme ℓ_1^p . On note par F l'enveloppe convexe de $|\cdot|_0$ sur B_1^p .*

- Montrer que pour tout $x \in B_1^p$, $\|x\|_1 \leq F(x)$.
- On note par (e_1, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{R}^p . Montrer que $F(\pm e_i) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, p$. Montrer aussi que $F(0) = 0$.
- En déduire, par convexité de F , que $F = \|\cdot\|_1$.

D'après la Proposition 1.3, il est naturel de considérer la méthode de ℓ_1 -minimisation :

$$(3) \quad \hat{x} \in \underset{t \in \mathbb{R}^p}{\text{argmin}} (|t|_1 : At = y).$$

Cette méthode est appelée le *Basis Pursuit* - c'est la *relaxation convexe* de (2). On va s'intéresser par la suite à trouver des matrices A , appelées matrices de mesures, pour lesquelles, on peut reconstruire n'importe quel signal s -parcimonieux (ou s -sparse) à l'aide de l'algorithme de Basis Pursuit. On a vu que la méthode de ℓ_0 -minimisation permet une telle reconstruction si toutes les sous-matrices extraites de taille $m \times (2s + 1)$ sont injectives, notamment cela implique que $m \geq 2s + 1$. C'est-à-dire, il faut au moins $2s + 1$ mesures pour reconstruire tout signal s -sparse par ℓ_0 -minimisation. On verra que pour l'algorithme de ℓ_1 -minimisation, on aura besoin de $m \gtrsim s \log(ep/s)$. C'est-à-dire, en transformant une procédure (2) très mauvaise algorithmiquement (ℓ_0 -minimisation) en sa relaxation convexe (ℓ_1 -minimisation), très facile à implémenter (c'est un problème d'optimisation linéaire sous contraintes linéaires), on ne souffre que d'une perte logarithmique dans le nombre de mesures nécessaires : on passe d'un nombre nécessaire de mesures en $\mathcal{O}(s)$ pour la ℓ_0 -minimisation à un nombre en $\mathcal{O}(s \log(ep/s))$ pour la ℓ_1 -minimisation. On propose maintenant une méthode de construction de matrices pour résoudre ce problème.

2. MATRICES GAUSSIENNES ET PROPRIÉTÉ D'ISOMÉTRIE RESTREINTE

Il se trouve que les seules matrices que nous savons actuellement construire pour lesquelles, on sait que seulement $m \sim s \log(ep/s)$ mesures sont suffisantes pour la reconstruction exacte de tout vecteur s -sparse sont des matrices aléatoires. Jusqu'à maintenant, on ne sait construire des matrices de manière déterministe ayant cette propriété de reconstruction seulement pour un nombre de mesures $m \sim s^2$ (et récemment pour $m \sim_\varepsilon s^{2-\varepsilon}$). Ce qui est loin des performances des matrices aléatoires pour lesquelles seulement $m \sim s \log(ep/s)$ mesures sont suffisantes.

On va alors s'intéresser à un exemple typique de matrices aléatoires : les matrices Gaussiennes. Une matrice Gaussienne est de la forme $A = (m^{-1/2} g_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq p}$ où les g_{ij} sont des variables aléatoires Gaussiennes standards i.i.d. (d'autres normalisations sont possibles). Pour se familiariser avec ces objets, on peut par exemple manipuler le spectre de telles matrices et "démontrer de manière empirique le théorème de Wigner" (voir aussi le Théorème de Marchenko-Pastur pour plus de références).

S-Question 2.1. *Représentation graphique du spectre des valeurs singulières (c'est à dire les racines carrées des valeurs propres de BB^T) d'une matrice Gaussienne $B = (p^{-1/2} g_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq p}$ quand m et p sont grands tels que $m/p = \rho \leq 1$. Cette simulation a pour objectif de montrer empiriquement que la mesure de comptage du spectre d'une matrice Gaussienne (dont le ratio entre les nombres de lignes et de colonnes tend vers une constante) tend presque sûrement vers une loi de Marcenko-Pastur. Pour cela, on se propose de représenter sur un même graphique :*

— la densité de Marchenko-Pastur (ou loi du demi-cercle) pour $0 < \rho \leq 1$,

$$f_\rho : x \mapsto \frac{1}{\rho\pi x} \sqrt{(b-x^2)(x^2-a)} \mathbb{1}_{[\sqrt{a}, \sqrt{b}]}(x)$$

où $a = (1 - \sqrt{\rho})^2$ et $b = (1 + \sqrt{\rho})^2$.

— la densité empirique du spectre d'une matrice Gaussienne $B = (p^{-1/2}g_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p}$.
On pourra représenter graphiquement

$$x \mapsto \frac{1}{2mh} \sum_{k=1}^m I(x-h \leq s_k \leq x+h)$$

où s_1, \dots, s_m sont les valeurs singulières de B .

Pour le problème de reconstruction de signaux, on travaille à m et p fixés. Notamment, des résultats asymptotiques, comme le théorème de Wigner, ne peuvent pas s'appliquer. On a alors recours à des théorèmes valables pour un nombre fixé d'observations (càd non-asymptotiques). Notamment, on a recours à des inégalités de concentration comme l'inégalité suivante.

Proposition 2.2 (Inégalité de Bernstein ψ_1). *Soit X_1, \dots, X_m des variables aléatoires i.i.d. telles que pour un certain $a > 0$, on a $\mathbb{E} \exp(a|X_1|) \leq 2$. Alors, il existe une constante absolue c_0 telle que pour tout $t > 0$,*

$$\mathbb{P} \left[\left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i - \mathbb{E} X_i \right| \geq ta \right] \leq 2 \exp(-c_0 m \min(t^2 \wedge t)).$$

T-Question 2.3. *L'objectif de cette question est de donner une preuve de la Proposition 2.2. Sans perte de généralité, on suppose que $\mathbb{E} X_i = 0, i = 1, \dots, m$.*

— *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \dots, m$, $\mathbb{E}|X_i|^k \leq 2k!a^{-k}$.*

— *Soit $0 < \lambda < ma$. En utilisant un développement de Taylor de la fonction exponentielle, montrer que*

$$\mathbb{E} \exp\left(\frac{\lambda X_i}{m}\right) \leq 1 + \frac{\lambda^2 a^{-2}}{m^2(1 - \lambda/(ma))}.$$

— *On pose $Z = m^{-1} \sum_{i=1}^m X_i$. En utilisant l'indépendance des X_i (et l'inégalité $1 + x \leq e^x$), montrer que pour tout $0 < \lambda < na$,*

$$\mathbb{E} \exp(\lambda Z) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2 a^{-2}}{n - \lambda a^{-1}}\right).$$

— *En utilisant l'inégalité de Markov (pour la variable aléatoire positive $\exp(\lambda Z)$), montrer que*

$$\mathbb{P}(Z > t) \leq \inf_{0 < \lambda \leq ma} \exp\left(-\lambda t + \frac{\lambda^2 a^{-2}}{m - \lambda a^{-1}}\right).$$

— *En déduire le résultat en optimisant en λ puis en appliquant ce qui précède à $-Z$.*

T-Question 2.4. Soit g une variable Gaussienne Standard (càd centrée et réduite). Montrer que $\mathbb{E}\exp(|g|^2/4) \leq 2$.

S-Question 2.5. Vérifier empiriquement l'inégalité de Bernstein pour des carrés de variables Gaussiennes Standards. On pourra par exemple, prendre $g_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ des Gaussiennes i.i.d. Standards et tracer sur un même graphe la fonction

$$t > 0 \mapsto \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I\left(\left|\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_{ij}^2 - 1\right| \geq t\right)$$

et la fonction $t > 0 \mapsto 2 \exp(-m(t^2 \wedge t))$ (en fait, la fonction $t > 0 \mapsto \exp(-(1/3)m(t^2 \wedge t))$ semble fournir une meilleure borne supérieure que celle obtenue dans le résultat général de Proposition 2.2).

Une propriété centrale de la matrice de mesures A en Compressed Sensing pour l'analyse du Basis Pursuit est la suivante.

Definition 2.6. Soit A une matrice de taille $m \times p$. On dit que A vérifie la **propriété d'isométrie restreinte** d'ordre $s \in \{1, \dots, p\}$ et paramètre $\delta \in (0, 1)$ quand pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ s -sparse (cad $|x|_0 \leq s$), on a

$$(1 - \delta) \|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|x\|_2^2.$$

Cette propriété de la matrice de mesures est suffisante pour la reconstruction exacte de tous les signaux s -sparse.

Theorem 2.7. Soit A une matrice de taille $m \times p$ qui satisfait la propriété d'isométrie restreinte d'ordre $8s$ et de paramètre $1/4$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ s -sparse, on a

$$\operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}^p} (|t|_1 : At = Ax) = \{x\}.$$

Autrement dit, il suffit de construire des matrices qui satisfont la propriété d'isométrie restreinte ayant un ordre s aussi grand que possible pour pouvoir l'utiliser comme mécanisme d'acquisition/compression (linéaire) de n'importe quel signal $s/8$ -sparse et être sûr de pouvoir reconstruire ce signal à l'aide de la procédure de Basis Pursuit. Notre objectif maintenant est de vérifier que les matrices Gaussiennes vérifient bien cette propriété à l'ordre s tel que $m \gtrsim s \log(ep/s)$.

Dans un premier temps, on va discrétiser la sphère unité de ℓ_2^p . Ceci constitue la première étape d'une méthode classique appelée "l' ε -net argument". On dit que Λ est un ε -réseau d'un ensemble T par rapport à la métrique ℓ_2^p quand $T \subset \cup_{x \in \Lambda} (x + \varepsilon B_2^p)$ et $\Lambda \subset T$ (B_2^p étant la boule unité de ℓ_2^p).

Proposition 2.8. Soit Λ un ε -réseau de B_2^p pour la métrique ℓ_2^p . On a

$$\Lambda \subset B_2^p \subset (1 - \varepsilon)^{-1} \operatorname{conv}(\Lambda)$$

où $\operatorname{conv}(\Lambda)$ est l'enveloppe convexe de Λ .

T-Question 2.9. Dans cette question, on se propose de donner une preuve de la Proposition 2.8. Soit $x \in B_2^p$. On veut montrer que $x \in (1 - \varepsilon)^{-1} \text{conv}(\Lambda)$. On va procéder itérativement. Soit $y_0 \in \Lambda$ tel que $|x - y_0|_2 \leq \varepsilon$. Si $x = y_0$ alors $x \in \Lambda \subset \text{conv}(\Lambda)$. Sinon $(x - y_0)/|x - y_0|_2 \in B_2^p$ alors il existe $y_1 \in \Lambda$ tel que $|(x - y_0)/|x - y_0|_2 - y_1| \leq \varepsilon$. En itérant ce procédé, montrer le résultat.

Proposition 2.10. Soit B un ensemble symétrique (si $x \in B$ alors $-x \in B$), convexe, compact et non vide de \mathbb{R}^p et $0 < \varepsilon < 1$. Il existe Λ un ε -réseau de B (càd $B \subset \cup_{x \in \Lambda} (x + \varepsilon B)$) tel que $|\Lambda| \leq (1 + 2/\varepsilon)^p$.

T-Question 2.11. L'objectif de cette question est de démontrer la Proposition 2.10. Soit B un ensemble symétrique, convexe, compact et non vide de \mathbb{R}^p et $0 < \varepsilon < 1$. On procède selon les étapes suivantes :

- a) On note $N(B, \varepsilon B)$ le cardinal minimal de Λ tel que Λ est un ε -réseau de B (pour des recouvrement par εB). On note par $M(B, \varepsilon B)$ le cardinal maximal d'un ensemble ε -séparé $\Theta \subset B$ càd tel que $\forall x, y \in \Theta$, si $x \neq y$ alors $x - y \notin \varepsilon B$. Montrer que

$$N(B, \varepsilon B) \leq M(B, \varepsilon B).$$

- b) Soit $\Theta \subset B$ un ensemble ε -séparé de B . Montrer que $\cup_{x \in \Theta} (x + (\varepsilon/2)B)$ est une union disjointe de boules de rayon $\varepsilon/2$.
- c) Montrer que $\cup_{x \in \Theta} (x + (\varepsilon/2)B) \subset (1 + \varepsilon/2)B$.
- d) En prenant le volume dans l'inégalité précédente, démontrer le résultat.

Nous avons dorénavant tous les outils (l'inégalité de concentration de Proposition 2.2, l' ε -net argument de Proposition 2.8 et la taille des ε -net de Proposition 2.10) pour montrer qu'une matrice Gaussienne vérifie la propriété d'isométrie restreinte avec grande probabilité.

Theorem 2.12. Soit $A = (m^{-1/2}g_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p)$ une matrice Gaussienne. Avec probabilité au moins $1 - 2 \exp(-c_0 m)$, A vérifie la propriété d'isométrie restreinte d'ordre $s \sim m/\log(ep/m)$ et de paramètre $\delta = 1/4$.

T-Question 2.13. Preuve de la propriété d'isométrie restreinte pour les matrices Gaussiennes. Dans cette question, on se propose de donner une preuve de Théorème 2.12.

- Soit B une matrice symétrique $p \times p$. Soit Λ un ε -réseau de \mathcal{S}_2^{p-1} pour un certain $\varepsilon \in (0, 1/2)$. On note par $\|B\| = \sup_{x \in \mathcal{S}_2^{p-1}} |Bx|_2$ la norme d'opérateur de B . Montrer que

$$\|B\| = \sup_{x \in \mathcal{S}_2^{p-1}} |\langle Bx, x \rangle| \leq (1 - 2\varepsilon)^{-1} \sup_{x \in \Lambda} |\langle Bx, x \rangle|.$$

- Pour tout $I \subset \{1, \dots, p\}$, on note par B_2^I (resp. \mathcal{S}^I) l'ensemble des points de B_2^p (resp. \mathcal{S}_2^{p-1}) qui sont à support dans I . Montrer que

$$\sup_{|x|_2=1, |x|_0 \leq s} \left| |Ax|_2^2 - 1 \right| = \max_{|I|=s} \sup_{x \in \mathcal{S}_2^I} |\langle (A_I^\top A_I - I_d)x, x \rangle|$$

où A_I est la matrice $m \times |I|$ extraite de A ayant pour colonnes les colonnes de A d'indices dans I .

— pour tout $I \subset \{1, \dots, p\}$ tel que $|I| = s$, on note par Λ^I un ε -réseau optimal de \mathcal{S}_2^I pour la métrique ℓ_2^p . On note $\Lambda = \cup_{|I|=s} \Lambda^I$. Montrer que

$$\log |\Lambda| \lesssim s \log \left(\frac{9ep}{s\varepsilon} \right). \text{ On rappelle que } \binom{p}{s} \leq \left(\frac{ep}{s} \right)^s.$$

— Montrer que

$$\sup_{|x|_2=1, |x|_0 \leq s} \left| |Ax|_2^2 - 1 \right| \leq (1 - 2\varepsilon)^{-1} \max_{x \in \Lambda} \left| |Ax|_2^2 - 1 \right|.$$

— Soit $x \in \Lambda$. En utilisant l'inégalité de concentration de Proposition 2.2, montrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P} \left[\left| |Ax|_2^2 - 1 \right| \geq t \right] \leq 2 \exp \left(-c_0 m (t^2 \wedge t) \right).$$

En utilisant une “union bound”, en déduire que

$$\mathbb{P} \left[\max_{x \in \Lambda} \left| |Ax|_2^2 - 1 \right| \geq t \right] \leq 2|\Lambda| \exp \left(-c_0 m (t^2 \wedge t) \right).$$

— Démontrer Théorème 2.12.

3. IMPLÉMENTATION DU BASIS PURSUIT.

Pour l'implémentation de l'algorithme de Basis Pursuit, nous allons utiliser le schéma de Douglas-Rachford. On souhaite calculer une solution au problème de ℓ_1 -minimisation (3). Le problème (3) est équivalent à

$$(4) \quad \min_{t \in \mathbb{R}^p} F(t) + G(t) \text{ où } F(t) = \delta_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in C \\ \infty & \text{si } t \notin C \end{cases} \text{ et } G(t) = \|t\|_1$$

où $C = \{t \in \mathbb{R}^d : At = Ax = y\}$. Dans le cadre générale de (4), les itérations de Douglas-Rachford sont données par

$$\tilde{x}_{k+1} = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \tilde{x}_k + \frac{\mu}{2} \text{rProx}_{\gamma G}(\text{rProx}_{\gamma F}(\tilde{x}_k)) \text{ et } x_{k+1} = \text{Prox}_{\gamma F}(\tilde{x}_{k+1})$$

où l'opérateur proximal et proximal-inverse sont définis pour tout $u \in \mathbb{R}^p$ par :

$$\text{Prox}_{\gamma F}(u) = \underset{t \in \mathbb{R}^p}{\text{argmin}} \left(\frac{1}{2} \|u - t\|_2^2 + \gamma F(t) \right) \text{ et } \text{rProx}_{\gamma F}(u) = 2\text{Prox}_{\gamma F}(u) - u.$$

On peut montrer que pour toutes valeurs les valeurs de $\gamma > 0$, $0 < \mu < 2$ et \tilde{x}_0 , on a $x_k \rightarrow \hat{x}$ où \hat{x} est une solution de (4).

T-Question 3.1. En s'aidant de Théorème 27.4 de [Rock97] et des indications p. 141 de [Boyd], montrer que les opérateurs proximaux de $\gamma \|\cdot\|_1$ et $\gamma \delta_C$ pour $C = \{t \in \mathbb{R}^d : At = Ax = y\}$ sont donnés par : pour tout $u \in \mathbb{R}^p$,

$$\text{prox}_{\gamma \delta_C}(u) = \text{proj}_C(u) = u - A^\top (AA^\top)^{-1} A(u - x) = u - A^\top (AA^\top)^{-1} (Au - y).$$

$$\text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_1}(u) = (\text{sign}(u_i) (|u_i| - \gamma) I(|u_i| > \gamma) : 1 \leq i \leq p)$$

S-Question 3.2. Implémenter le schéma de Douglas-Rachford pour trouver une solution au problème du Basis-Pursuit. Illustrer quelques exemples de reconstructions exactes de vecteurs parcimonieux à partir de m mesures Gaussiennes.

S-Question 3.3. Pour cette dernière question, nous allons simuler le diagramme de changement de phase du Basis Pursuit. Pour un s et m donnés on va répéter l'expérience suivante : On se donne une matrice Gaussienne A de taille $m \times p$, on construit une centaine de vecteurs s -sparse $\{x_1, \dots, x_{100}\}$ (par exemple en choisissant le support et les coordonnées non nulles de manière aléatoire). On calcul la proportion de vecteurs x_j qui ont été exactement reconstruits par l'algorithme de Basis Pursuit (précédemment implémenté par l'algorithme de Douglas-Rachford). Sur un diagramme, au point de coordonnée (s, m) , on place un carré gris dont le gris est fonction de la proportion : noir, quand tous les vecteurs ont été exactement reconstruits et blanc, quand aucun vecteur a été reconstruit. On remplit ce diagramme en faisant varier m et s . On trouvera une idée du résultat dans la Figure 1.

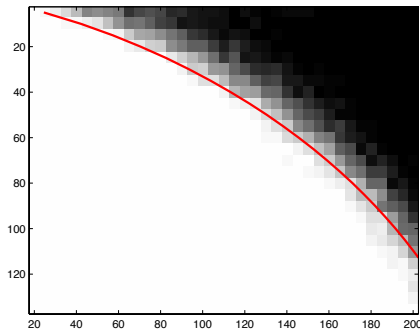


FIGURE 1. Diagramme de changement de phase du Basis Pursuit. L'axe des abscisses est la sparsité s des signaux. L'axe des ordonnées est le nombre m de mesures. Le noir signifie la reconstruction exacte en grande proportion et le blanc signifie une faible proportion de succès. On déclare la reconstruction exacte avec une tolérance de 10^{-5} . La courbe rouge est la transition de phase théorique $s \mapsto s \log(ep/s)$.

RÉFÉRENCES

- [HUL93] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms. II*, volume 306 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Advanced theory and bundle methods.

- [Rock97] Rockafellar, R. Tyrrell. *Convex analysis, Princeton Landmarks in Mathematics. Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [Boyd] Boyd, Stephen and Vandenberghe, Lieven. *Convex optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.